Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Департамент освіти і науки Київської облдержадміністрації
Фастівський ліцей-інтернат

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ГАУССА ДО ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ

учитель фізики вищої категорії,
«старший вчитель»
Ярошко Леонід Михайлович

Фастів-2015

ВСТУП

Слову «сила» належить своєрідний рекорд. Майже в будь-якому тлумачному словнику поясненню цього слова відводиться чи не найбільше місця. Різноманітність понять, в яких вживається слово «сила» воістину вражає: тут фізична сила і сила волі, кінська сила і сила переконань, стихійні сили і сила пристрасті, сила пари і т.д.

Як це поняття ввійшло в науку? Воно не було придумане заново і не було взяте із мертвої мови, як це було з більшістю наукових термінів: електрон, ентропія, інтерференція. Воно ввійшло в науку з живої мови і тому далеко не відразу і не без зусиль очистилось від відтінків притаманних буденному його використанню.

Тільки Галілею і Ньютону вдалося цілком звільнити поняття сили від «прагнень» та «бажань» та інших подібного роду властивостей, притаманних живій матерії. Класична механіка Галілея і Ньютона стала колискою наукового розуміння слова «сила». Отже, в класичній механіці строго визначено, що таке сила. Це означення включає в себе спосіб вимірювання сил. Дію сил точним кількісним способом пов’язують з прискоренням. Механіка – єдина наука, «в якій дійсно знають, що означає слово сила».[4]

Але і до цього часу в термінології збереглися відголоски того періоду. Згадайте, наприклад, електрорушійну силу (яка по суті не сила, а робота), жива сила (кінетична енергія), сила світла, сила струму: жодне з цих понять ніякого стосунку до сили в звичайному механічному розумінні не має.

Проте і в механіці ситуацію з силами навряд чи можна вважати блискучим. Залишається нез'ясоване питання: чому, внаслідок яких фізичних процесів з'являються ті чи інші сили.

В механіці складнощі, які стосуються природи сил, зазвичай пояснюють несуттєвими просто внаслідок відмови говорити про них. Такий підхід цілком можливий. Для обчислення траєкторії руху тіл достатньо знати, чому кількісно дорівнює сила. А знати величину сил, визначити, коли і як вони діють, можна і не вникаючи в їх природу, а лише знаючи способи їх виміру.

Та обставина, що природа сил не є суттєвою в механіці, є недоліком механіки, але і одночасно є її перевагою. Саме тому механіка успішно описує рух і молекул і зірок.

Незважаючи на надзвичайне різноманіття дій тіл одне на одне, в кінцевому результаті вони зводяться до взаємодії елементарних частинок. В природі згідно з сучасними даними є лише чотири типи сил. В безмежних просторах Всесвіту, на нашій планеті, в будь-якій частині речовини, в

живих організмах, в атомах, атомних ядрах і, нарешті, при взаємних перетвореннях елементарних частинок ми зустрічаємося з проявом сил тільки чотирьох типів. Це сили тяжіння, електромагнітні сили, ядерні сили і слабка взаємодія. Твердження про те , що існує всього лише чотири типи сил, звичайно, не означає, що всі відомі процеси пояснені їх дією. Просто ми не можемо на даний час назвати явище, яке для свого пояснення потребувало би введення нових сил, крім перерахованих. Причому тільки два перші типи сил ми можемо розглядати як сили в понятті ньютонівської механіки.

Історія відкриття Ньютоном закону всесвітнього тяжіння досить відома. Вперше думка про те, що природа сил, які змушують падати камінь і визначають рух небесних тіл, - одна і та ж, виникла ще у Ньютона-студента. Перші обчислення не дали правильних результатів, оскільки дані які були в той час про відстань від Землі до Місяця були неточними. Тільки через 16 років з'явилися нові виправлені дані про цю відстань. Після того як були проведені нові обчислення, в яких було враховано рух Місяця, всіх відкритих до того часу планет сонячної системи, комет, припливи і відпливи, теорія була опублікована.

Відкриття закону всесвітнього тяжіння по праву вважається найбільшим тріумфом науки.

Чому ж саме Ньютон, а не Галілей, який відкрив закони вільного падіння (і до речі, приділяв астрономії значно більше часу, ніж Ньютон), не Роберт Гук, або хтось із видатних попередників чи сучасників Ньютона? Справа тут не в простій випадковості, не в падаючих яблуках, і навіть не в степені геніальності, хоча ця обставина, звичайно, досить суттєва. Головним було те, що в руках Ньютона були відкриті ним закони, які можна застосувати до будь-яких рухів. Саме ці закони, те, що ми зараз називаємо механікою Ньютона, дозволили з цілковитою впевненістю зрозуміти, що коренем всіх явищ, основою, яка визначає особливості руху, є сила.

Відкриття законів взаємодії електричних зарядів, що є нерухомими один відносно одного, було зроблено під безпосереднім впливом ідей Ньютона і, зокрема, його закону всесвітнього тяжіння. Можна сказати, що це відкриття було зроблено без особливих труднощів. В середині XVIII століття уже висловлювалися припущення, що закон взаємодії зарядів аналогічний закону всесвітнього тяжіння. Першим довів це експериментально англієць Генрі Кавендіш. Своїх робіт по електриці він не оприлюднював. Більше ста років рукописи пролежали в бібліотеці Кембриджського університету, поки їх не віднайшов Максвел і не опублікував. До того часу закон взаємодії зарядів був встановлений у

Франції Шарлем Кулоном і відтоді носить його ім'я.[6]

Подібність формул для обчислення модулів сил гравітаційної :

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

та електричної взаємодії:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

дає можливість застосувати деякі поняття та розрахунки однієї взаємодії для розрахунків іншої.

ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1.1 Електричне поле

На початку XIX ст. у фізиці з'явилося нове поняття, яким сьогодні означують частину матерії, з якої складається світ – поняття поля. Автором нововведення був британський учений Майкл Фарадей.

На початку XIX ст., домінуючою точкою зору у причині природних взаємодій, була точка зору миттєвої взаємодії між предметами на відстані, без будь-який пояснень або носіїв цієї взаємодії. Ця точка зору, підкріплена авторитетом Ісака Ньютона, уважалася неспростовною істиною, оскільки навіть ліквідація повітря між зарядженими тілами не знищувала їх взаємодію. Молодий учений – експериментатор Майкл Фарадей, 1820 року, висуває сміливу гіпотезу про існування проміжної субстанції в просторі, що відповідала за електричну взаємодію, і називає її електричним полем. Його гіпотеза ґрунтувалася на експерименті, який він провів, спостерігаючи поведінку дрібних непровідних порошинок, які перебували поблизу зарядженого тіла. Відтворення експерименту Фарадея дозволяє не тільки зрозуміти його гіпотезу, а й уявити вигляд цієї субстанції. У 60-х роках цього ж сторіччя, інший британський науковець Джеймс Максвел, зміг побудувати математичну модель

електричного поля в поєднанні з полем магнітних взаємодії, яка отримала назву теорії електромагнітного поля. Згодом ця теорія отримала експериментальне підтвердження, що дозволяє сьогодні вважати Майкла Фарадея засновником теорії поля.

Отже, електричним полем є - частина матерії, яка оточує заряджені тіла, входить до складу електромагнітного поля й забезпечує електричну взаємодію. Електричне поле, яке оточує нерухомі заряджені тіла називається електростатичним полем.

Основною властивістю електричного поля, якою воно заявляє про своє існування, - це здатність діяти на заряди з певною силою. Якщо в електричне поле, створене одним зарядом, внести другий заряд, то на цей заряд поле діятиме з певною силою. В той же час поле другого заряду з такою самою за значенням силою, але протилежно спрямованою, діятиме на перший заряд. Інакше кажучи, на кожний із зарядів діє не другий заряд, який міститься десь в іншому місці, а *електричне поле* там, де знаходиться заряд, який зазнає дії. Поле, створюване кожним зарядом у деякій точці поля, не залежить від того, чи існує в цій точці другий заряд чи ні.

1.2 Напруженість електричного поля

Силовою характеристикою електричного поля є фізична величина, яка називається напруженістю. Поле, яке існує навколо електричних зарядів досліджують за допомогою пробного заряду. Під пробним зарядом розуміють малий додатній заряд, який своїм полем не може спотворювати досліджуване поле, отже це уявний заряд, власне електричне поле якого досить слабке порівняно з досліджуваним.

Напруженість електричного поля у будь-якій точці поля − це відношення сили, що діє на пробний заряд до величини цього заряду: $\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q_0}$. Звідси слідує, що коли пробний заряд q_0 внести в електричне поле напруженістю E , то на нього буде діяти сила, величиною $\bar{F} = q_0\bar{E}$. Ця формула справедлива для обрахування сили, що діє з боку поля на довільний електричний заряд. При цьому вектори $\bar{F}$ та $\bar{E}$ збігаються за напрямком, коли q>0 та мають протилежні напрямки, якщо q <0.

За одиницю напруженості в СІ взято напруженість у такій точці поля, де на пробний заряд величиною в 1 Кл діє сила в 1 Н, тобто [E] = [1 Н/Кл].

Якщо електричне поле утворене одним точковим зарядом q, значення напруженості дістаємо безпосередньо із закону Кулона, згідно з яким на пробний заряд q_0 з боку поля, створеного

зарядом q, діє сила $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{qq_0}{r^2}$. Тоді напруженість поля точкового заряду q на відстані r від нього:

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\frac{q}{}$$

Напруженість електричного поля точкового заряду зменшується пропорційно до квадрата відстані від заряду.

Для графічного зображення електричних полів користуються методом ліній напруженості − це криві, проведені в електричному полі, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямком вектора напруженості. Лініям напруженості приписують напрямок, що збігається з напрямком вектора напруженості. Вважають, що лінії напруженості завжди починаються на поверхні позитивного заряду і закінчуються на поверхні негативного − вони є незамкнутими лініями. Якщо $\bar{E}$ у всіх точках поля мають однакове значення і напрямок, при цьому лінії напруженості мають рівну густину та паралельні між собою, то поле називають однорідним. Прикладом такого поля може бути електричне поле в зазорі між пластинами конденсатора, хоча вже на краях пластин це поле − неоднорідне. Прикладом неоднорідних полів є й поля навколо точкових зарядів.

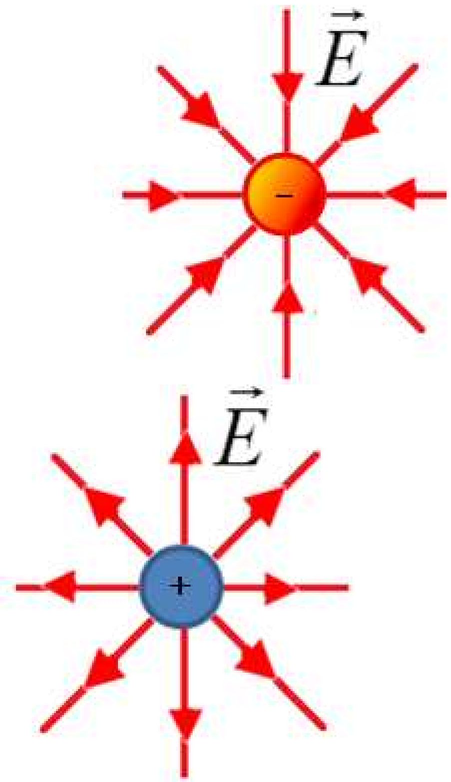

Рис.1 Картина силових ліній ізольованих точкових зарядів

Якщо існує сукупність нерухомих точкових зарядів q_1, q_2, …,q_n, то кожне з цих тіл, по-перше пов’язане із власним електричним полем незалежно від наявності інших тіл, по-друге − ці поля накладаються. Якщо в таке поле внести пробний заряд q_0, то на нього діятиме деяка сумарна сила $\sum \overline{F_i} = q_0 \sum \overline{E_i}$, де $\sum \overline{E_i}$ −

напруженість результуючого електричного поля системи точкових зарядів, яка визначається як векторна сума напруженостей полів окремих заряджених тіл.

Отже, результуюче поле можна знайти простим накладанням (суперпозицією) електричних полів окремих зарядів. Цей висновок підтверджується експериментально і називається принципом незалежності дії електричних полів, або принципом суперпозиції.

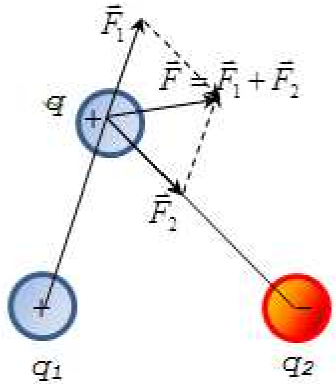

Рис.2 Принцип суперпозиції полів

Для оцінки характеристик електричного поля (напруженість) використовують принцип суперпозиції (наприклад заряд розповсюджений по колу, по поверхні, тощо) разом з тим поле поблизу тіл з рівномірно розповсюдженим зарядом легко розрахувати за допомогою теореми Гаусса.

1.3 Потік вектора напруженості. Теорема Гаусса

Наочне зображення електричного поля можна дістати за допомогою картини ліній напруженості. Провівши дотичну до лінії напруженості, дізнаємося про напрям вектора напруженості в даній точці поля. Порівнюючи густину ліній напруженості в різних місцях, з'ясовуємо, де і в скільки разів більша напруженість поля. Однак значення ліній напруженості цим не вичерпується.

Добре знайома властивість неперервності ліній у вакуумі відображає важливу властивість електричного поля: лінії напруженості можна проводити, дотримуючись правила густини і не обриваючи їх при цьому у вакуумі і між зарядами; лінії починаються на додатних зарядах і закінчуються на від'ємних: на кожному заряді починається (або закінчується) кількість ліній, пропорційна до значення заряду.

Властивість неперервності ліній напруженості електричного поля становить суть теореми Гаусса.

Розглянемо довільну замкнуту поверхню. Якщо всередині поверхні зарядів немає, то кількість ліній напруженості, які виходять з цієї поверхні, точно дорівнює кількості ліній, які входять у поверхню. Лінії, що входять, зручно враховувати разом з тими, які виходять, але

приписувати їм знак «мінус». Тоді можна сказати, що повна кількість ліній напруженості, які виходять з «порожньої» поверхні, дорівнює нулю. Якщо ж всередині поверхні є деякий заряд, то, очевидно, що **повна кількість ліній напруженості, які виходять з поверхні, пропорційна значенню цього заряду.** Це і є якісне формулювання *теореми Гаусса.* Для строгого кількісного формулювання цієї теореми необхідно ввести поняття потоку вектора напруженості електричного поля.

Розглянемо деяку площадку *S* (рис.3), яку пронизують силові лінії однорідного електричного поля напруженістю $\bar{E}$(для простоти зображення вважатимемо, що площадка має форму прямокутника). Число силових ліній *N*, що проходять через одиничну площадку перпендикулярно до напрямку поля, пропорційне напруженості електричного поля, тобто $E \sim N/S$, звідки $N \sim E \cdot S = \Phi_E$ називають потоком напруженості поля через площадку, який, як видно, пропорційний числу силових ліній, що перетинають дану поверхню.

Якщо вектор напруженості електричного поля перпендикулярний до деякої площадки, то потік напруженості через дану площадку $\Phi_E = \bar{E} \cdot \bar{S}$ Якщо ж площадка

S, утворює деякий кут з $\bar{E}$, то потік $\Phi_E = \bar{E}\cdot\bar{S}\cdot cos\varphi$

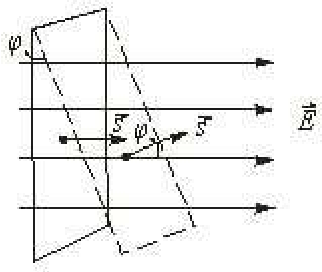

Рис. 3 Потік вектора Е через площадку

Розглянемо більш загальний випадок, коли електричне поле − неоднорідне, а поверхня неплоска (рис. 4). Розіб'ємо дану поверхню на n елементів з площами ΔS_1, ΔS_2,… ΔS_n. Таке розбиття повинно забезпечити дві умови:

1 кожен елемент ΔS_n повинен бути плоским;

2. електричне поле в межах кожного елемента – однорідне.

За таких умов потік вектора напруженості через всю поверхню буде сумою .$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^{n} E_i\cdot\Delta S_i$ Якщо $\Delta S_i \to 0$, то рівність стає точною, тобто

.$\Phi_E = \int \bar{E}\cdot d\,\bar{S}$

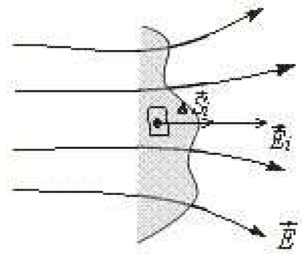

Рис. 4 Потік вектора Е через неплоску поверхню

Якщо силове поле пронизує об'ємне тіло, то вектор напруженості, що входить в об'єм із вектором перпендикулярним до елементарної площадки утворює кут $\varphi > \frac{\pi}{2}$, тобто $cos\varphi < 0$, а вектор $\bar{E}$, що виходить із елементарної площадки, утворить кут $\varphi < \frac{\pi}{2}$, тобто $cos\varphi > 0$. Відповідно, потік, що входить в замкнений об'єм – від'ємний , а потік, що виходить із даного об'єму – додатній. Оскільки число ліній, які входять в об'єм дорівнює числу ліній, що виходять то результуючий потік $\Phi_E = 0$. Потік не дорівнює нулю лише в тому випадку, коли якась кількість ліній починається або закінчується всередині замкненої поверхні. А оскільки силові лінії можуть починатись чи закінчуватись лише на електричних зарядах, то потік буде відмінним від нуля лише у випадку, коли сумарний заряд всередині поверхні відмінний від нуля.

Формулювання теореми Гаусса має вигляд: потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнуту поверхню прямо пропорційний повному заряду, який міститься всередині цієї поверхні.

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

Теорема Гаусса дозволяє з легкістю обчислювати напруженість електричних полів при симетричному розміщенні зарядів, обчислюючи потік вектора напруженості електричного поля.[7]

1.4 Застосування теореми Гаусса

Для прикладу застосування теореми Гауса наведемо розрахунок напруженості нескінченної рівномірно зарядженої площини із поверхневим зарядом σ. Із міркувань симетрії можна вважати, що силові лінії перпендикулярні до площини, направлені від неї в обидві сторони і мають всюди однакову густину. Іншими словами , поле нескінченної рівномірно зарядженої площини є однорідним.

Виберемо замкнену поверхню у вигляді циліндра, розміщеного симетрично відносно площини (рис. 5).

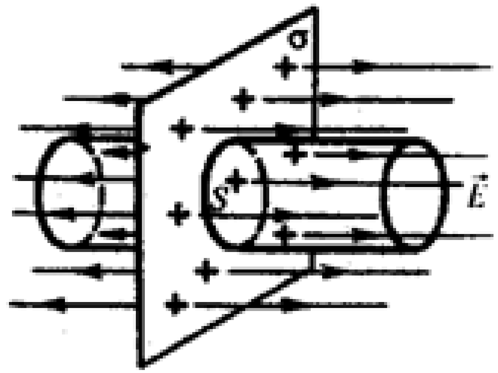

Рис.5 Поле рівномірно зарядженої площини

Потік напруженості поля через бічну поверхню дорівнює нулю, тому повний потік через замкнену поверхню дорівнює сумі потоків через основи циліндру:

$$N = 2ES$$

За теоремою Гаусса цей же потік:

$$\Phi = \frac{\sigma S}{2\varepsilon_0}.$$

Прирівнявши праві частини обох рівностей, дістанемо:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

тобто напруженість поля нескінченної рівномірно зарядженої площини визначається лише поверхневою густиною зарядів.

ГРАВІТАЦІЙНЕ ПОЛЕ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

2.1 Гравітаційне поле

Закон всесвітнього тяжіння дає лише кількісну оцінку взаємодій, але не розкриває механізму тяжіння. Досліди показали, що сила тяжіння не залежить від густини навколишнього середовища, тому взаємодію можна зрозуміти, якщо вважати, що взаємодіючі тіла утворюють навколо себе поле тяжіння або гравітаційне поле.

Одна із самих чудових властивостей сил всесвітнього тяжіння відображено уже в самій назві, яку дав Ньютон: всесвітні. Ці сили,якщо можна так сказати, «самі універсальні» серед усіх сил природи. Все що має масу – а маса притаманна будь-якій формі, будь-якому виду матерії, піддається впливу гравітаційної взаємодії. Виключення не є навіть світло. Для всесвітнього тяжіння немає перешкод. Ми зможемо завжди поставити нездоланний бар’єр для електричного поля (таким бар’єром може бути екран із будь-якого провідника); всередину надпровідника, як відомо, не проникає магнітне поле. Але гравітаційна взаємодія вільно передається через будь-які тіла.[6]

Гравітаційні сили зменшуються зі збільшенням відстані – потрібно завжди уточнювати, що саме ці відстані при такому формулюванні приймаються багато більшими, ніж розміри тіл. Саме в цьому випадку справедливий сформульований Ньютоном закон: сили всесвітнього тяжіння зменшуються обернено пропорційно квадрату відстані між тілами. Арифметично це означає, що якщо, наприклад, відстань збільшується в три рази, то сила зменшується в 3^2, тобто в дев'ять разів, і т.д. Однак з цього підрахунку ще не зрозуміло, що це – швидка або не дуже швидка зміна з відстанню? Чи означає такий закон, що взаємодія практично відчувається лише між сусідами, або ж воно помітно і на досить великих відстанях? Відповідь на це питання, мабуть, найзручніше дати, порівнюючи закон зменшення з відстанню гравітаційних сил з законом, за яким зменшується сила світла в міру віддалення від джерела. Як в одному, так і в іншому випадку діє, виявляється, один і той же закон – обернена пропорційність квадрату відстані. Але ж ми бачимо зірки, які знаходяться від нас на таких величезних відстанях, пройти які навіть світловий промінь, який не має суперників по швидкості, може лише за мільярди років. Адже якщо до нас доходить світло від цих зірок, значить (закон-то зменшення однаковий) повинно, хоча б і дуже слабо, відчуватися їх тяжіння. Отже, дія сил всесвітнього тяжіння простягається, безперервно зменшуючись, практично на необмежені відстані. Як кажуть

фізики, радіус їх дії дорівнює нескінченності. Гравітаційні сили – це далеко діючі сили. Така «Офіційна назва» цих сил у фізиці. Далеко не всі сили мають такий характер. Внаслідок далеко дії гравітація пов'язує всі тіла Всесвіту.

2.2 Напруженість гравітаційного поля

Нехай тіло масою М породжує навколо себе гравітаційне поле. Розглянемо його характеристики. Для цього помістимо тіла m_1, m_2, m_3, в точку простору, що характеризується деяким радіус-вектором $\vec{r}$ відносно тіла з масою М.

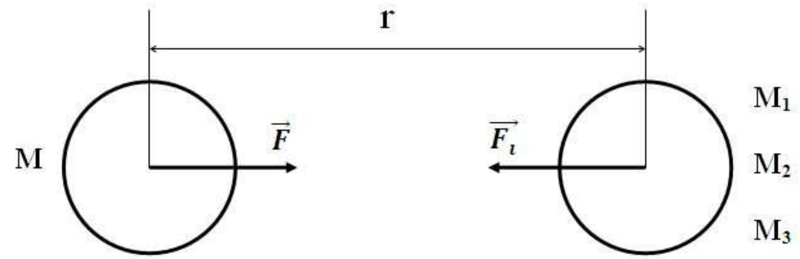

Рис. 6 Гравітаційна взаємодія тіл

Зі сторони тіла М на кожне з тіл m_1, m_2, m_3 будуть діяти сили. Тоді:

$$\overrightarrow{F_1} = -\gamma \frac{Mm_1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\overrightarrow{F_2} = -\gamma \frac{Mm_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F_3} = -\gamma \frac{Mm_3}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Якщо розділити кожну з цих сил на маси m_1, m_2, m_3 , то отримаємо одну і ту саму величину:

$$\frac{\vec{F_1}}{m_1} = \frac{\vec{F_2}}{m_2} = \frac{\vec{F_3}}{m_3} = -\gamma \frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Дане рівняння виражає силу, що діє на тіло з одиничною масою, яка знаходиться в заданій через радіус-вектор точці простору зі сторони гравітаційного поля. Цю силову характеристику називають напруженістю поля тяжіння G:

$$G = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M}{r^2}$$

Напруженість поля тяжіння в деякій точці простору:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Напруженість поля тяжіння є його силовою характеристикою і вона показує яка сила діє зі сторони поля тяжіння на тіло, що розміщене в даному полі. Якщо напруженість поля в усіх точках поля однакова по величині і по напрямку, то таке поле називають однорідним. Якщо у кожній точці поля вектор напруженості направлений вздовж прямих, що перетинаються в т.О, яка нерухома відносно вибраної системи відліку, то таке поле – центральне.

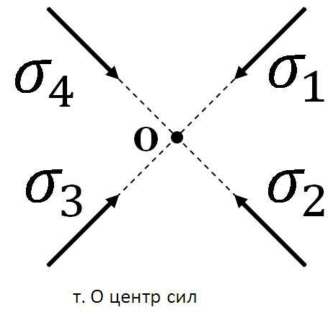

Рис. 7 Центральне гравітаційне поле

Якщо чисельне значення напруженості залежить тільки від відстані r до центра сил (т.О), то напруженість G=G(r). Поле буде сферично-симетричним. Поле тяжіння, що створене математичною точкою або однорідною кулею – центральне та сферичне.

Якщо поле створюється тілами, то напруженість результуючого поля дорівнює векторній сумі напруженостей полів, створених кожним з цих тіл:

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{N} \vec{G_i} = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{r_i^2}\frac{\vec{r_i}}{r_i}$$

Дане твердження – принцип суперпозиції(принцип накладання полів), яке є слідством закону адитивності сил.

На основі рівнянь знаходимо, що прискорення вільного падіння тіла дорівнює напруженості поля тяжіння в цій точці, де в цей момент знаходиться падаюче тіло:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{G}$$

Нехай гравітаційне поле утворюється закріпленою в початкових координатах матеріальною точкою маси m, тоді на матеріальну точку маси m_1, яка знаходиться в точці або в положенні, яке задане радіус-вектором буде діяти сила , яка чисельно дорівнює:

$$F = Gm_1 = \gamma \frac{mm_1}{r^2}$$

2.3 Потік вектора напруженості гравітаційного поля

Поняття потоку вектора є одним з найважливіших понять векторного аналізу. Воно використовується при формулюванні властивостей електричного, магнітного й інших векторних полів.

Спочатку це поняття було введено в гідродинаміці. Розглянемо у полі швидкостей рідини малу площу , яка перпендикулярна до вектора швидкості рідини. Об'єм рідини, що протікає через цю площадку за час , дорівнює

$$V = \vartheta \cdot t \cdot S.$$

Якщо площадка нахилена до потоку, то відповідний об'єм буде

$$V = \vartheta \cdot t \cdot S \cdot cos\alpha,$$

де α – кут між вектором швидкості й нормаллю до площини. Об'єм рідини, що протікає через площадку за одиницю часу, отримаємо діленням цього виразу на t.

По аналогії гравітаційного і електричного полів можна ввести поняття потоку гравітаційного поля. Якщо вектор напруженості гравітаційного поля перпендикулярний до деякої площадки, то потік напруженості через дану площадку $\Phi_G = \bar{G} \cdot \bar{S}$. Якщо ж площадка *S*, утворює деякий кут з $\bar{E}$, то потік $\Phi_G = \bar{G} \cdot \bar{S} \cdot cos\varphi$.

2.4 Теорема Гаусса для гравітаційного поля

Електричний заряд це міра електричної взаємодії. Модуль сили між двома точковими зарядами можна знайти за формулою, що є математичним записом закону Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Маса тіла є мірою гравітаційних властивостей тіла. Модуль сили гравітаційної взаємодії:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Модуль сили електричної і гравітаційної взаємодії обернено пропорційний квадрату відстані між тілами. Це дає нам право на застосування теореми Гаусса для розрахунку силових характеристик гравітаційного поля. Формулювання теореми для електричного поля зустрічається майже у всіх довідниках, навчальних посібниках та деяких підручниках з фізики. Воно також часто зустрічається в Інтернет джерелах.

Сформулюємо теорему Гаусса для гравітаційного поля із означення потоку вектора напруженості. Модуль вектора напруженості гравітаційного поля точкового тіла:

$$G = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M}{r^2}$$

Опишемо навколо тіла сферичну поверхню радіусом r. Площа цієї поверхні обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi r^2$$

Тоді формула для обчислення модуля потоку гравітаційного поля приймає вигляд:

$$\Phi = 4\pi\gamma M$$

Саму ж теорему Гауса можна сформулювати так: **модуль потоку вектора напруженості гравітаційного поля прямо пропорційний масі обмеженій цією поверхнею.**

Ми розглядаємо модуль потоку, тому що лінії напруженості гравітаційного поля подібні до ліній напруженості негативного заряду напрямлені до нього, а потік який входить у замкнену поверхню вважається від’ємним.

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ГАУССА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ГРАВІТАЦІЙНИХ ПОЛІВ

3.1 Напруженість гравітаційного поля нескінченно довгого циліндра

Нехай у нас є нескінченно довгий циліндр радіусом R. Обчислимо напруженість гравітаційного поля, яке створює циліндр в залежності від відстані до його осі.

Виберемо в якості замкненої поверхні циліндр, який є коаксіальним з даним, радіусом r<R і висотою h.

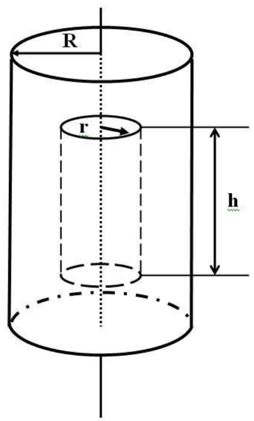

Рис.8 Замкнена поверхня всередині циліндра

Із міркувань симетрії можна вважати, що силові лінії перпендикулярні до бічної поверхні і направлені до осі циліндра. Потік вектора

напруженості гравітаційного поля через основи вибраного циліндра дорівнює нулю, тому повний потік через замкнену поверхню дорівнює потоку через бічну поверхню циліндра.

За означенням потік:

$$\Phi_G = \bar{G} \cdot \bar{S} \cdot cos\varphi \quad 3.1$$

Оскільки лінії напруженості перпендикулярні до поверхні то:

$$\Phi_G = \bar{G} \cdot \bar{S} \quad 3.2$$

Із теореми Гаусса можна записати:

$$\Phi = 4\pi\gamma M \quad 3.3$$

Де M маса обмежена циліндром:

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot h = \rho\pi r^2 h \quad 3.4$$

Прирівнюючи формули 3.2 та 3.3 з урахуванням 3.4 маємо:

$$G = \gamma \cdot \rho \cdot \pi \cdot r \quad 3.5$$

Якщо ми виберемо циліндр r>R то з аналогічних міркувань матимемо:

$$G = \frac{2\gamma\rho_l}{r} \quad 3.6$$

Введемо поняття лінійної густини. Лінійна густина – це маса одиниці довжини циліндра.

$$\rho_l = \frac{m}{l}$$

Якщо r<R то напруженість поля прямо пропорційна r.

У випадку r>R – напруженість обернено пропорційна r. Графік залежності напруженості від відстані буде мати вигляд.

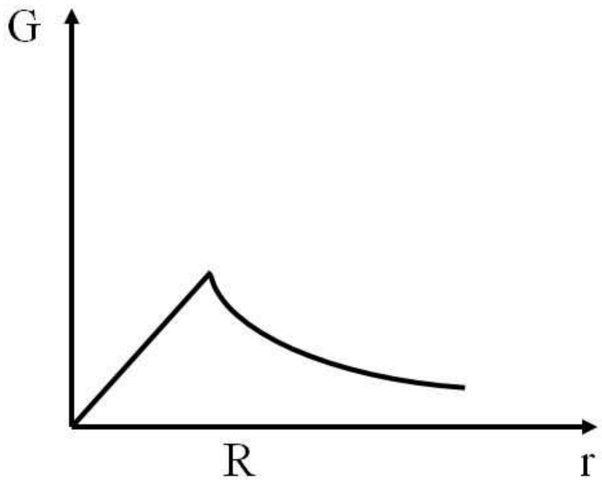

Рис. 9 Графік напруженості циліндра

3.2 Напруженість гравітаційного поля нескінченної площини.

Застосуємо теорему Гауса для розрахунку напруженості нескінченної площини із поверхневою густиною ρ_S. Із міркувань симетрії можна вважати, що силові лінії перпендикулярні до площини,

направлені до неї з обох сторін і мають всюди однакову густину. Іншими словами, поле нескінченної площини є однорідним.

Виберемо замкнену поверхню у вигляді циліндра, розміщеного симетрично відносно площини (рис. 10).

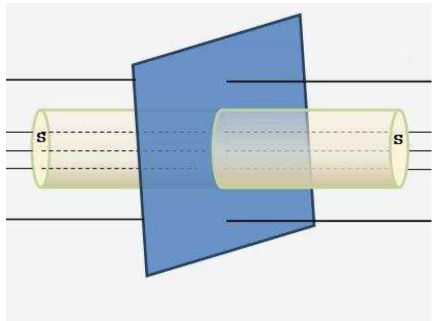

Рис.10 Поле нескінченної площини

Потік напруженості поля через бічну поверхню дорівнює нулю, тому повний потік через замкнену поверхню дорівнює сумі потоків через основи циліндру:

$$\Phi = 2GS$$

За теоремою Гаусса цей же потік:

$$\Phi = 4\pi\gamma\rho_S S.$$

Прирівнявши праві частини обох рівностей, дістанемо:

$$G = 2\pi\gamma\rho_S,$$

напруженість поля нескінченної площини визначається лише поверхневою густиною і не залежить від відстані до пластини.

3.3 Напруженість поля однорідної кулі

Виведемо функціональну залежність напруженості гравітаційного поля(прискорення вільного падіння) для однорідної кулі від відстані до центра кулі.

В якості замкнутої поверхні виберемо сферу радіусом r із спільним центром з кулею.

Тоді лінії напруженості будуть перпендикулярні до поверхні сфери, а поле буде центральне та сферичне.

Потік який буде пронизувати поверхню сфери за означенням:

$\Phi = GS,$

де S площа сфери і дорівнює:

$S = 4\pi r^2$

а за теоремою Гауса

$\Phi = 4\pi\gamma M,$

якщо r<R, то маса, яку обмежує сфера дорівнює:

$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$

Отримуємо формулу для обчислення напруженості гравітаційного поля всередині кулі:

$G = \frac{4}{3}\pi\gamma r\rho.$

Коли r>R, тоді напруженість поля виражається співвідношенням:

$G = \gamma \frac{M}{r^2}$

Всередині кулі напруженість прямо пропорційна відстані від центру, а за її межами – обернено пропорційна її квадрату.

Графік залежності напруженості гравітаційного поля для однорідної кулі буде мати вигляд:

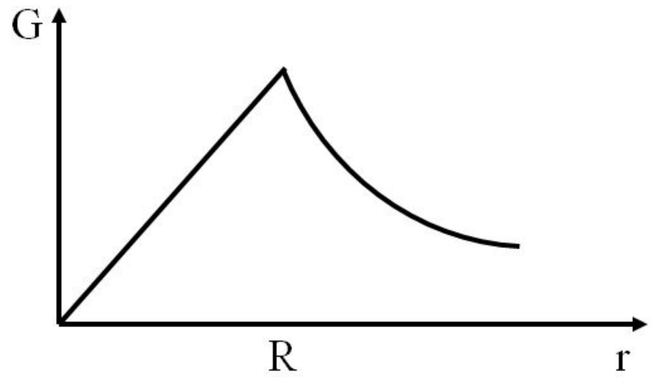

Рис. 11 Напруженість однорідної кулі

ВИСНОВКИ

1. В результаті проведених робіт ми дослідили залежність масових характеристик тіл від відстані (закон Ньютона).
2. Розрахували напруженість гравітаційного поля для тіл симетричної форми.
3. Розрахунки напруженостей гравітаційних полів користуючись теоремою Гаусса абсолютно підтверджують закон Ньютона для всесвітнього тяжіння.
4. Застосування отриманих нами інформаційних матеріалів дозволяє спрогнозувати перспективу майбутніх космічних польотів.
5. Отримані результати та розрахунки можуть бути використані на факультативних заняттях , спецкурсах, підготовці до олімпіад для розв'язку нестандартних задач і т.д.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Горбачук І. Т. Загальна фізика 1997, 435с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики, том 2. Электричество. М. Наука. 1994. 387 с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 3. Электричество. М. Наука 1983. 688 с.
4. Енгельс Ф., Діалектика природи. Госполитиздат, 1950, стр. 56.
5. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика для поступающих в вузы: учебное пособие.-2-е изд., испр.-М.:Наука., 1982.-608с
6. Григорьев В.И., Мякишев Г.Я. Силы в природе. Издание второе, дополненное. М.: Наука., 1966.-400с.
7. Карякин Н.И., Быстров К.Н., Киреев П.С. Краткий справочник по физике. 2-е издание М.: «Высшая школа»., 1963.-560с
8. Гончаренко С.У. Фізика 10. Пробний навчальний посібник для ліцеїв та класів природничо-наукового профілю. Київ. : Освіта. 1995.-432с.
9. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Учеб. пособие для вузов. 4-е изд., испр. - М.: Высш. шк. , 2002. - 718 с.
10. Яворский Б.М., Пинский А.А. Основы физики. Том 1. Механика. Молекулярная физика. Электродинамика.. 5-е изд. стереот. - М.: Физматлит, 2003. - 576с.
11. Трофимова Т.И. "Курс физики". 11-е изд., стер. - М.: 2006.— 560 с.